バミューダン・オプションの価格および感応度評価に用いる
量子深層学習ツールの開発
―パラメータシフト法による感応度の高速計算―

1. 背景

金融機関におけるリスク管理では金融商品の価格だけでなく、市場の変化に対する感応度を高速かつ正確な評価することが求められる。しかし、エキゾチック型オプションと呼ばれる複雑な金融商品の場合、正確な感応度を計算するには大変時間がかかる。

2. 目的

本プロジェクトの目的は、エキゾチック型オプションの一種であるバミューダン・オプションの価格および感応度評価へ量子深層学習を活用した効率的な計算手法の提案である。量子コンピューティングは金融業界でも近年注目されつつあるが、「重ね合わせ」や「もつれ」という量子の特性を生かした量子深層学習を用いることで、エキゾチック型オプションの感応度を効率的に計算できると考えられる。

3. ソフトウェア開発内容

図 1 は本プロジェクトで提唱している量子回路を用いたオプションの価格および感応度評価の概要図である。

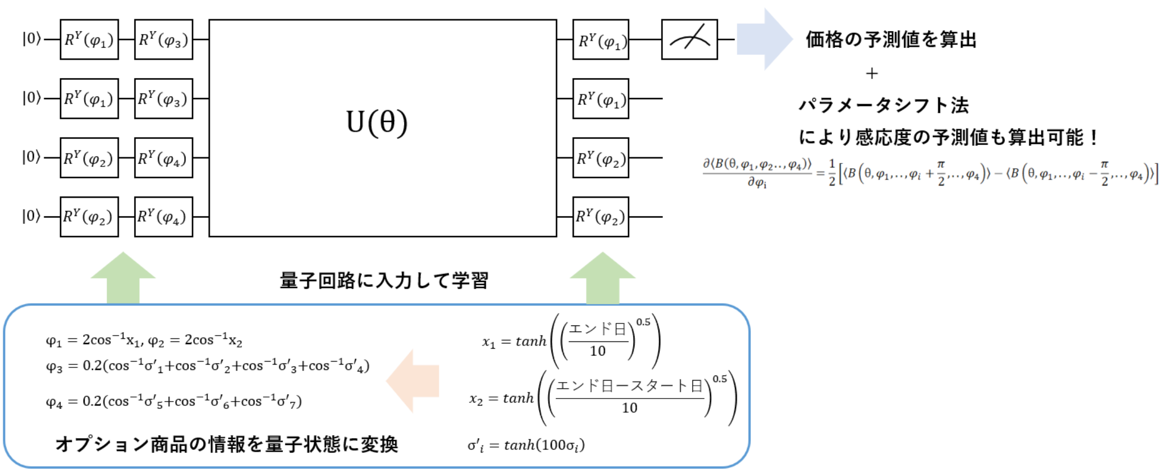

図 1：量子回路を用いたオプションの価格および感応度評価の概要図

詳細は以下の通り 4 つのステップに分けられる。

ステップ 1：入力データを量子状態に変換する。入力データをS、出力データをV としたN組の訓練データ$\{S_i,\mathrm{V}_i\}$（$i = 1,2,\ldots,N$）を考える。Vはオプション価格であり、S

はオプション価格に影響を及ぼす変数であるが、ここでは原資産価格とする。最初にSおよびVを量子状態として入力できるよう$tanh$関数を用いて変換する。例えばバニラ型オプションの場合、以下のように変換する。

$$x(S) = tanh\left(\left(\frac{S}{K}\right)^{\beta}\right),\ y(V) = tanh(\left(\frac{V}{C}\right)^{\gamma})$$

ここで β, γ および C は固定されたパラメータとする。次に

$$|\Psi_{in}(x_i)\rangle = U_{in}(x_i)|00\ldots0\rangle,$$
$$U_{in} = \{R_2^Y(\varphi_5)\otimes R_1^Y(\varphi_4)\}R^{XX}(\varphi_3)\{R_2^Y(\varphi_2)\otimes R_1^Y(\varphi_1)\},$$
$$\varphi_1 = sin^{-1}x,\ \varphi_2 = sin^{-1}x,\ \varphi_3 = sin^{-1}x,\ \varphi_4 = sin^{-1}x,\ \varphi_5 = sin^{-1}x$$

とする。

ステップ 2：出力状態$|\Psi_{out}(\theta, x_i)\rangle = U(\theta)|\Psi_{in}(x_i)\rangle$を生成する。特にバミューダン・スワップションにおいて$U(\theta)$の選択は重要であるが、本プロジェクトでは Weight sharing や Overparameterization を用いた$U(\theta)$を採用している。

ステップ 3：測定値$\langle B(\theta, \varphi(x_i))\rangle$を出力値$y_i$とみなし、コスト関数 L が最小になるようパラメータ θ を Adam optimizer などの勾配法によって更新する。コスト関数 L は以下の通り設定している。

$$L = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\left(\text{教師データ}_{\mathrm{i}} - y_i\right)^2}{\text{教師データ}_{\mathrm{i}}}$$

ステップ 4: 学習された量子回路を用いて価格および感応度を算出する。価格は予測値y_iから逆算して計算できる。感応度についてはパラメータシフト法を用いる。
Chain rule により

$$\frac{\partial\langle B(\theta, \varphi_1, \varphi_2.., \varphi_M)\rangle}{\partial S} = \frac{\partial x}{\partial S}\cdot\sum_{i=1}^{M}\frac{\partial\varphi_{\mathrm{i}}}{\partial x}\frac{\partial\langle B(\theta, \varphi_1, \varphi_2.., \varphi_M)\rangle}{\partial\varphi_{\mathrm{i}}}$$

が成立するが、$\frac{\partial\langle B(\theta,\varphi_1,\varphi_2..,\varphi_M)\rangle}{\partial S}$を求めるには$\frac{\partial x}{\partial S}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial\varphi_{\mathrm{N}}}{\partial x}$, $\frac{\partial\langle B(\theta,\varphi_1,\varphi_2..,\varphi_M)\rangle}{\partial\varphi_1}, \ldots,$ $\frac{\partial\langle B(\theta,\varphi_1,\varphi_2..,\varphi_M)\rangle}{\partial\varphi_{\mathrm{M}}}$が分かれば良い。また$\frac{\partial\langle B(\theta,\varphi_1,\varphi_2..,\varphi_M)\rangle}{\partial\varphi_{\mathrm{i}}}$はパラメータシフト法を用いて

$$\frac{\partial\langle B(\theta,\varphi_1,\varphi_2..,\varphi_M)\rangle}{\partial\varphi_i}=\frac{1}{2}[\langle B\left(\theta,\varphi_1,..,\varphi_i+\frac{\pi}{2},..,\varphi_M\right)\rangle-\langle B\left(\theta,\varphi_1,..,\varphi_i-\frac{\pi}{2},..,\varphi_M\right)\rangle]$$

と解析的に求めることができる。そして、例えば感応度デルタは以下の通り求められる。

$$\frac{\partial V}{\partial S}=\frac{\partial\langle B(\theta,\varphi_1,\varphi_2..,\varphi_M)\rangle}{\partial S}/\frac{\partial y}{\partial V}$$

量子回路学習を用いてバニラ型オプションの価格およびデルタが計算できる jupyter notebook を作成した(図 2)。Spot と名付けられた配列に原資産価格を入力すると Black-Scholes の公式を用いてバニラ型オプションの価格が出力される。そしてこれらを教師データとして量子回路学習を行い、学習された価格(learned price)およびパラメータシフト法を用いて計算されたデルタ(learned delta)が出力される。

Quantum circuit learning to compute option prices and their sensitivites

A tutorial on using QCL to compute option prices and delta values.

In [1]:
```
import pennylane as qml
from pennylane import numpy as np
import scipy.stats as si
from matplotlib import pyplot as plt
import pandas as pd
import csv

random_seed = 0
np.random.seed(random_seed)
```

Suppose we have 7 training pairs (S_i, V_i) for $i = 1, 2, \ldots, 7$. S_i are stock prices and V_i are European call option prices.

In [2]:
```
num_of_data = 7
Spot = np.zeros(num_of_data)

Spot[0] = 93
Spot[1] = 95
Spot[2] = 97
Spot[3] = 100
Spot[4] = 103
Spot[5] = 105
Spot[6] = 107
```

learned price	learned delta
0.6400488021468097	0.17568385330145408
1.0731720594494631	0.259856484085488
1.6876924546962935	0.35632006168815406
2.9899659800202567	0.5131162936933921
4.764308465590926	0.6676809362832505
6.192682218815452	0.7580248133448244
7.781837954997643	0.8263631174756644

図 2：価格およびデルタ計算の WEB アプリケーション

4.　新規性・優位性

量子回路学習を用いてオプションの感応度計算を実現したことである。本プロジェクトではバニラ型オプションではデルタ、バミューダン・スワップションではベガを、学習された量子回路からパラメータシフト法を用いて計算することに成功した。また、近年深層学習で研究の盛んな Overparameterization を利用した量子回路がバミューダン・スワップションの価格学習及び感応度の計算に有効であることを確認できた。

5.　期待されるユーザー価値と社会へのインパクト

　想定しているユーザーは金融機関においてリスク管理業務に携わる方々である。本プロジェクトで提案した量子回路にデータを学習させることで、効率的にバミューダン・スワップションの価格および感応度を計算することが可能となる。今後は他のエキゾチック型オプションに対しても量子回路学習を活用し、金融業界における量子コンピューティングの活用を進展させていきたい。

6.　氏名（所属）

佐久間 貴之(創価大学 経済学部)

（参考）関連 URL

・バニラ型オプションの価格およびデルタ計算の jupyter notebook
  https://github.com/ta641/option_QCL/blob/master/qclop_tutorial.ipynb

・チュートリアルと共に作成した jupyter notebook を、量子機械学習の金融応用デモとして pennylane コミュニティーで紹介
  https://pennylane.ai/qml/demos_community.html